

NUMERICKÉ METODY OPTIMALIZACE VÝZTUŽE PRVKŮ A DETAILŮ ŽELEZOBETONOVÝCH KONSTRUKCÍ

Navržení optimálního rozmístění a objemu výztuže je zpravidla iterativní proces, vyžadující po každé změně průměrů nebo počtů vložek provést opětovné posouzení části konstrukce. Pro tento proces lze využít v příspěvku prezentovaných optimalizačních algoritmů, které nejen ušetří čas, ale mohou i vést k optimálnějšímu výslednému řešení, než jakého by se dosáhlo ručním postupem. V příspěvku jsou ukázány optimalizační metody vhodné pro návrh rozmístění výztuže a optimalizační metody pro návrh plochy výztuže. Tyto metody byly implementovány do již existujícího software, jehož výsledky jsou v článku prezentovány.

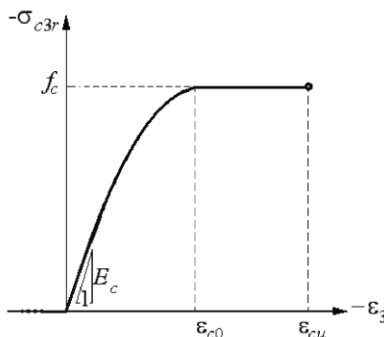
1 ÚVOD

V rámci vývoje aplikace pro IDEA StatiCa Detail bylo jedním z cílů vyvinout metodu pro automatický návrh rozmístění a množství výztuže. Pro tento účel byly vyvinuty metody, které byly implementovány do již existujícího software. Nelineární topologická optimalizace je algoritmus, který umožňuje nalezení optimálních poloh a směrů výztuž v modelu. Následně může být použita metoda optimalizace ploch výztuže, schopna určit optimální plochy výztuže předem dané geometrie tak, aby celková hmotnost výztuže byla co nejnižší, ale aby přitom výsledný model vyhověl posudku pro dané zatěžovací stavy.

Základní myšlenkou bylo využití MKP modelu aplikace IDEA StatiCa Detail a jeho rozšíření o optimalizační algoritmy, které jsou v první fázi schopny navrhnout optimální rozmístění výztuže pro danou geometrii a způsob zatížení a v dalším kroku iterativním způsobem měnit plochy navržených výztuží, a tak nalézt optimální řešení.

2 POPIS MKP MODELU

MKP model využitý v popisovaných optimalizačních metodách vychází z modelu IDEA StatiCa Detail pro mezní stav únosnosti. Bylo však provedeno několik modifikací za účelem zlepšení konvergence optimalizace. Beton je ve výpočtu modelován pomocí 2D stěnových prvků. Materiálový model představující beton je nelineární (viz Obr. 1) s maximální pevností v tlaku f_c a nulovou pevností v tahu. Oproti modelu pro MSÚ není u optimalizace uvažováno tlakové změkčení betonu. Posouzení drčení betonu však není předmětem optimalizace a jeho zanedbání ve většině případů ovlivní redistribuci napětí jen minimálně.



Obr. 1 Uvažovaný pracovní diagram betonu

¹ Ing. Jaromír Kabeláč, Ph.D.

² Ing. Michael Konečný

³ Ing. Michal Číhal

⁴ Ing. Lukáš Bobek

IDEA StatiCa s.r.o., U Vodárny 2a, Brno, 616 00

IDEA StatiCa s.r.o., U Vodárny 2a, Brno, 616 00

IDEA StatiCa s.r.o., U Vodárny 2a, Brno, 616 00

FAST VUT v Brně, Veveří 331/95, Brno, 602 00

jaromir.kabelac@ideastatica.com

michael.konecny@ideastatica.com

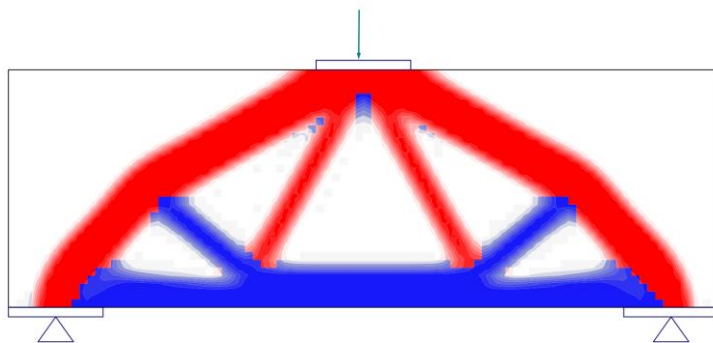
michal.cihal@ideastatica.com

lukas.bobek@vutbr.cz

Vložky výztuže jsou modelovány pomocí 1D prvků přenášejících pouze tah a tlak. Tyto prvky jsou k síti 2D prvků představujících beton připojeny speciálními interpolačními vazbami. V rámci optimalizace není uvažován vliv koncových úprav a není modelována soudržnost mezi výztuží a betonem. Materiál výztuže uvažuje i plastické chování výztuže.

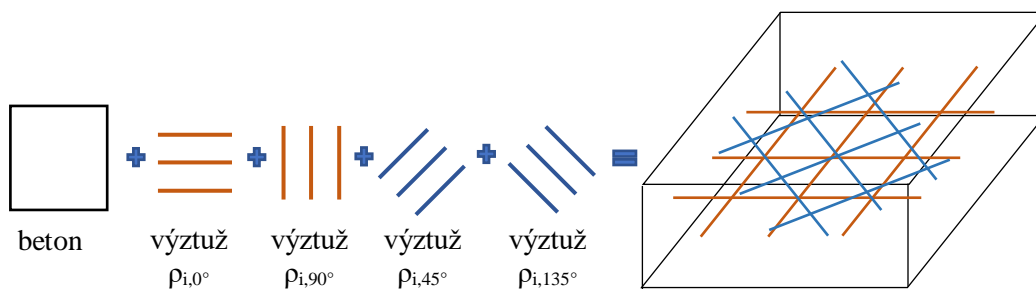
3 NELINEÁRNÍ TOPOLOGICKÁ OPTIMALIZACE

Zásadní otázkou při vyztužování železobetonové konstrukce je nalezení optimální polohy a směru výztuže. Pro tuto úlohu byl vyvinut speciální algoritmus, který je vlastně modifikací standardní topologické optimalizace. Standardní topologická optimalizace pracuje s lineárním materiálem a hledá optimální rozmístění hustoty materiálu (viz. Obr. 2). Jedná se o lineární výpočet metodou konečných prvků, přičemž každý prvek konečné prvkové sítě má jako optimalizovaný parametr hustotu na daném prvku. Optimalizací těchto hustot získáme ideální tvar tělesa s nejmenší energií napjatosti. Tuto optimalizaci lze použít pro stanovení ideální příhradové analogie. Tato optimalizace však nerespektuje nelineární chování betonu a je jen hrubým návodem, kam umístit výztuž.



Obr. 2 Lineární topologická optimalizace

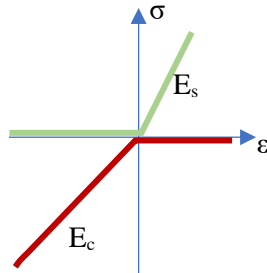
Proto se postup topologické optimalizace modifikuje následujícím způsobem. Pro konečné prvkové řešení se vytvoří speciální prvek (viz. Obr. 3). Prvek se skládá z několika vrstev. Z vrstvy betonu a z vrstev rozptýlené výztuže ve směru vodorovném, svislém, případně i výztuž pod úhlem 45° a 135°. Jako optimalizovaný hledaný parametr je stupeň vyztužení v daném směru $0^\circ / 45^\circ / 90^\circ / 135^\circ$.



Obr. 3 Konečný prvek pro nelineární topologickou optimalizaci

Beton se modeluje jako deska určité tloušťky s izotropním materiálem a modulem pružnosti E_c , přičemž je v simulaci uvažováno idealizované nelineární chování s tím, že v každém hlavním směru napjatosti je beton

nosný pouze v tlaku (viz. Obr. 4). V tahových složkách deformace se beton uvažuje jako idealizovaný, tedy nenosný. Výztuž je modelovaná jako rozptýlená s modulem pružnosti oceli E_s . Plocha rozptýlené výztuže na jednotku délky je v daném směru dána stupněm vyztužení ρ_i . Reálná výztuž má shodné chování v tahu i v tlaku. Pro hledání rozmístění výztuže je toto chování nevhodné. Výztuž by měla ideálně vykrývat pouze tahové oblasti, v kterých je beton neúčinný. Proto je materiálový diagram výztuže modifikován tak, že výztuž v tlaku není nosná (viz. Obr. 4).



Obr. 4 Pracovní digram výztuže (zeleně) a betonu (červeně)

Samotná optimalizační úloha je formulována takto:

- Optimalizované parametry jsou stupně vyztužení v daném směru ρ_i , $0^\circ / 45^\circ / 90^\circ / 135^\circ$.
- Stupeň vyztužení může nabývat hodnot od zanedbatelně malého, nenulového stupně vyztužení, až do maximálního možného stupně vyztužení.

$$\rho_i \in \langle \rho_{min}, \rho_{max} \rangle$$

- Celková hmotnost výztuže nabývá cílové hodnoty m_{goal} , (A_i značí plochu i -tého prvku). Zjednodušeným zápisem:

$$\sum \rho_i \cdot A_i = m_{goal}$$

- Deformace v uzlech \mathbf{u} splňuje rovnice rovnováhy, tedy je korektním řešením nelineární konečné prvkové úlohy (\mathbf{R} je vektor vnitřních sil na elementech a \mathbf{F} je vektor vnějších sil v uzlech)

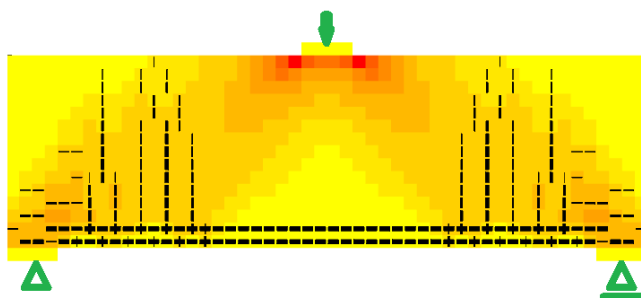
$$\mathbf{R}(\mathbf{u}, \rho_i) = \mathbf{F}$$

- Hledá se takové rozložení stupně vyztužení, pro které platí, že potenciální energie soustavy je minimální:

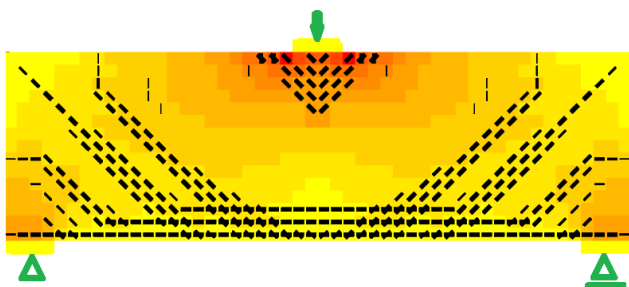
$$\min \mathbf{F}^T \mathbf{u}(\rho_i)$$

Popis postupu řešení takovéto úlohy je poměrně rozsáhlý a přesahuje možnosti tohoto článku. Jedná se o náročný iterační proces skládající se iteračního řešení nelineární úlohy pro dané rozložení stupně vyztužení. Nad tímto iteračním procesem je nadřazený iterační proces, který hledá optimální rozložení výztuže podle výše uvedených podmínek.

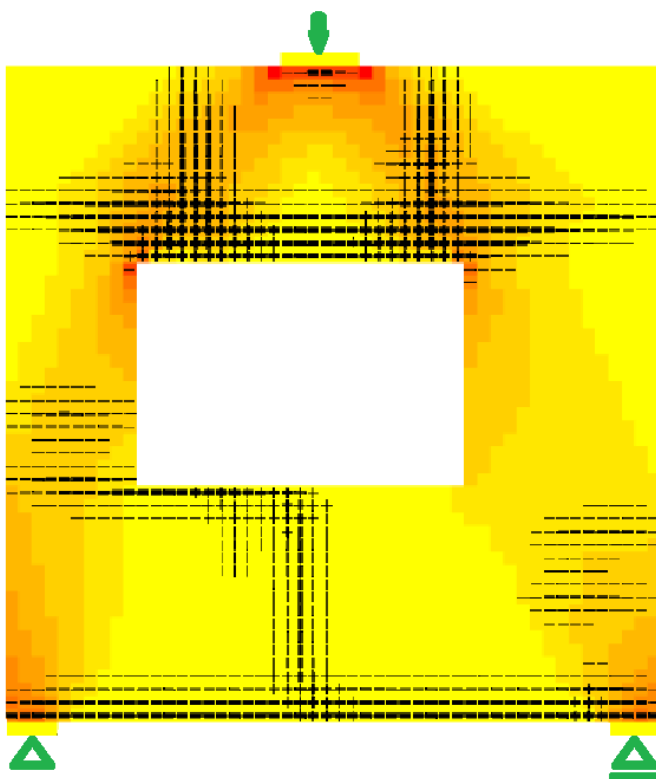
Výsledky této metody lze ilustrovat na následujících příkladech. Prvním příkladem je prostě podepřený nosník, s bodovým zatížením uprostřed. Jsou zde ukázány dva různé výsledky. První uvažuje výztuž pouze ve vodorovném a svislém směru (viz. Obr. 5). Je zřejmé, že dle předpokladů je převážná část materiálu využita na hlavní tahovou výztuž nosníku a část je použita na trmínky vykrývající smykové oblasti. Odlišný výsledek dostaneme pokud umožníme výztuž v diagonálním směru (viz. Obr. 6). Je to dáno tím, že diagonální výztuž je ve smykové oblasti účinnější, což je ostatně známý jev. Na Obrázku 7 je ukázáno již praktičtější upotřebení zde prezentované metody na panelu s otvorem. Obrázek dává jednoznačný návod, jak by měl být panel vyztužen pro dané bodové zatížení a bodové podepření.



Obr. 5 Topologická optimalizace rozložení výztuže na prostém nosníku. Tloušťka udává optimalizovanou hustotu výztužení. Barevná škála ukazuje tlakové oblasti v betonu.



Obr. 6 Topologická optimalizace rozložení výztuže na prostém nosníku s umožněním diagonální výztuže. Tloušťka udává optimalizovanou hustotu výztužení. Barevná škála ukazuje tlakové oblasti v betonu.



Obr. 7 Topologická optimalizace rozložení výztuže na panelu s otvorem. Tloušťka čar udává optimalizovanou hustotu výztužení. Barevná škála ukazuje tlakové oblasti v betonu.

4 OPTIMALIZACE PLOCH VÝZTUŽE

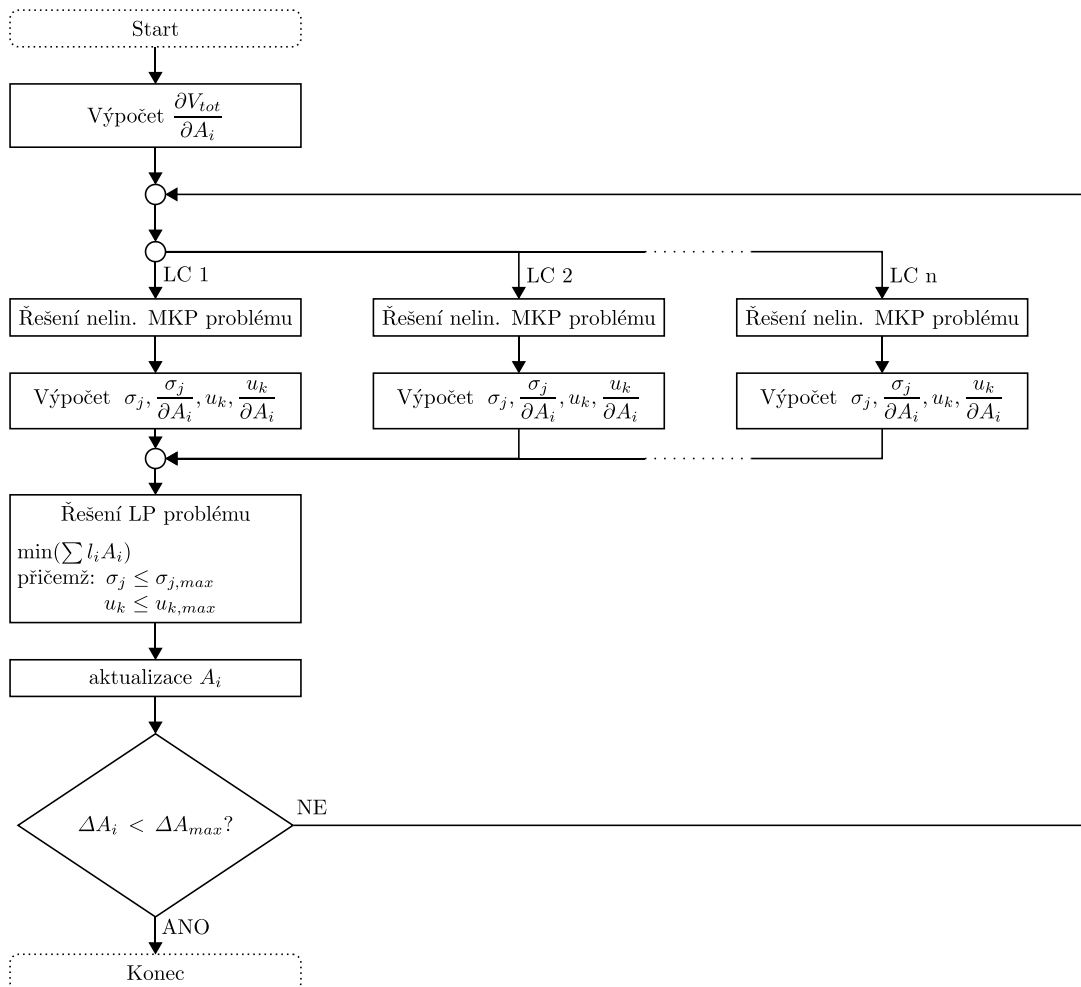
Účelem optimalizace ploch je minimalizovat celkový objem použité výztuže, přičemž omezující podmínkou je nepřekročení limitního napětí v tahu v žádné z optimalizovaných vložek. Z důvodu stability algoritmu je také dobré zamezit velkým deformacím modelu, ke kterým by mohlo docházet např. v případě drcení betonu. Toho lze docílit omezením deformací ve vybraných bodech. Navíc, pokud je výpočet prováděn pro vícero zatěžovacích stavů současně, je nutné, aby byly všechny omezující podmínky (napětí na výztuži a maximální deformace) splněny současně.

Optimalizační problém lze pak vyjádřit jako:

$$\min(V_{tot}) \Leftrightarrow \min\left(\sum_{i=1}^{n_r} l_i A_i\right)$$

kde V_{tot} je celkový objem výztuže v modelu
 l_i je délka i -té vložky výztuže
 A_i je plocha průřezu i -té vložky výztuže
 n_r je počet optimalizovaných vložek

Pro řešení optimalizačního problému byl navržen algoritmus, kterého vývojový diagram je uveden na obr. 8.



Obr. 8 Zjednodušený vývojový diagram optimalizačního algoritmu

V prvním kroku je spočítán gradient cenové funkce $\frac{\partial V_{tot}}{\partial A_i}$ vzhledem k plochám vložek výztuže. Hodnota tohoto gradientu není funkcí ploch jednotlivých vložek, tudíž je konstantní po dobu celého výpočtu a není ji třeba dále aktualizovat.

Následně je vyřešen MKP problém pro všechny zatěžovací stavy. Pro každý zatěžovací stav jsou pak spočítány hodnoty omezujících funkcí (napětí na výztuži $\sigma_{j,l}$ a deformace na okraji modelu $u_{k,l}$) a jejich gradienty vůči plochám výztuží $(\frac{\partial \sigma_{j,l}}{\partial A_i}, \frac{\partial u_{k,l}}{\partial A_i})$.

Na základě spočtených hodnot je pak vygenerován lineární optimalizační subproblém, jenž je aproximací celkového optimalizačního problému pro současné hodnoty A_i . Tento problém je vyřešen pomocí simplexové metody a nově spočtené průměry výztuží A_i jsou následně aktualizovány v MKP modelu. Celý proces je opakován. Pokud je změna průřezu mezi jednotlivými kroky menší, než definovaná tolerance ΔA_{max} , výsledek je prohlášen za optimální a algoritmus je ukončen.

Je vhodné poznamenat, že výpočet hodnot omezujících funkcí a jejich gradientů, stejně jako řešení optimalizačního subproblému je z časového hlediska zanedbatelné. Většinu času výpočtu představuje opakované řešení nelineárního MKP problému. Výraznou část času lze však uspořit opětovným využitím výsledků spočítanými pro předchozí hodnoty ploch. Pokud zajistíme, aby změna ploch A_i mezi jednotlivými iteracemi optimalizace nebyla příliš velká, pak lze u MKP řešení v další iteraci navázat na předchozí řešení, kde jedinou změnou v MKP modelu jsou aktualizované plochy výztuží. Tato úprava má ve většině případů za následek několikanásobné zrychlení.

Namísto lineárního optimalizačního problému by bylo možné generovat i optimalizační problém vyššího řádu. Vzhledem k povaze problému, kdy je třeba optimalizované proměnné měnit pouze po malých krocích, se však lineární optimalizace ukázala jako dostačující. Využití simplexového algoritmu je navíc praktické díky své rychlosti, robustnosti a jednoduchosti implementace.

Výstupem optimalizační metody jsou optimální plochy výztuže pro danou geometrii v rámci 2D MKP modelu. Tyto plochy jsou v rámci GUI aplikace prezentovány uživateli, který rozhodne, zda chce optimální plochy dosáhnout změnou počtu vrstev výztuže, nebo změnou průměru. Tento proces je možné částečně automatizovat, např. nabídnout uživateli několik nejlepších kombinací počtů vrstev a běžných průměrů, z kterých pouze vybere jednu variantu.

V případě třmínků je vhodné uživateli umožnit úpravu (dovyztužení) i pomocí změny vzdálenosti třmínků. Uživateli je proto v tomto případě prezentována optimální plocha na jednotkovou délku smykové oblasti, v rámci které může následně upravit průměry, počet vrstev a také vzdálenosti třmínků.

5 ZÁVĚR

Uvedené optimalizační metody mají potenciál usnadnit navrhování výztuže betonových prvků. Návrh vyztužení je díky použití těchto metod efektivní a časově úsporný. Projektant tak stráví méně času hledáním optimálního vyztužení – nejhodnějšího rozmístění a množství výztuže v prvku. Navrhnuté celkové množství výztuže pomocí software je tak podstatně menší, avšak stále vyhovující v porovnání s ručním výpočtem.

REFERENCE

- [1] BENDSØE, M. P., SIGMUND, O., *Topology Optimization, theory, methods and applications*, Springer, 2003.
- [2] NAVRÁTIL, J., KABELÁČ, J., ŠEVČÍK, P., MICHALČÍK, L., FOLTYN, P., *Řešení stěn a detailů betonových konstrukcí*, In: Sborník ke konferenci 24. BETONÁŘSKÉ DNY 2017, Czech Republic, 2017
- [3] MATA-FALCÓN, J., TRAN, D., T., KAUFMANN, W., NAVRÁTIL, J. *Computer-aided stress field analysis of discontinuity concrete regions*, In: Proceedings of EURO-C 2018 Computational Modelling of Concrete and Concrete Structures, Austria, 2018, in print
- [4] Teoretický manuál IDEA StatiCa Detail 2018